

Un metodo numerico per il recupero dei parametri costruttivi originali di un quadrante

di Gianpiero Casalegno

Lo studio ed il restauro di antichi quadranti richiedono la ricostruzione del tracciato orario primitivo, sovente deteriorato pesantemente dal tempo. Questo processo passa necessariamente attraverso il recupero dei parametri di progetto originali del quadrante. In alternativa all'approccio classico descritto in letteratura, viene qui presentato un diverso metodo di calcolo, applicabile a qualunque tipo di orologio e di tracciato orario.

Introduzione

Ogni gnomonista si trova prima o poi di fronte al problema di risalire ai parametri originali di progetto di un quadrante solare.

Questa esigenza può nascere dalla semplice curiosità di conoscere la declinazione della parete su cui è tracciato un quadrante oppure di verificare se le linee tracciate appartengano ad un sistema orario o ad un altro (es. italico normale o da campanile).

Lo storico può invece essere interessato a scoprire la latitudine di origine di un manufatto mobile e da questa risalire al luogo di costruzione e magari all'autore.

Chi poi per professione si occupa del restauro di antichi orologi ha sovente la necessità di recuperare gli elementi grafici originali cancellati nel tempo, avendo a disposizione solamente alcune tracce dell'intreccio originario.

In tutti i casi descritti la risposta al quesito porta necessariamente al calcolo dei parametri iniziali di progetto dell'orologio ovvero :

- latitudine e longitudine del luogo
- declinazione ed inclinazione della parete
- posizione e lunghezza dello stilo

In funzione della situazione e della tipologia di quadrante alcuni di questi parametri possono non essere applicabili (es. la longitudine nel caso di linee orarie legate all'ora locale quali le italiche, le temporali ecc. o la declinazione e l'inclinazione nel caso di un orologio orizzontale) o possono essere noti (es. la presenza di un foro nella parete può essere indizio della presenza in quel punto di uno stilo).

Approccio classico

Il calcolo dei parametri incogniti procede generalmente secondo il seguente flusso logico :

- si identificano sul quadrante gli elementi utili quali : equinoziale, meridiana, incroci di queste con le linee orarie ecc.

- si misurano gli angoli e le distanze pertinenti a questi elementi geometrici

- si identificano le formule trigonometriche che a partire dai parametri incogniti fornirebbero questi dati misurati

- si invertono queste funzioni in modo da ottenere i parametri incogniti

Ad esempio è noto che su un quadrante verticale declinante la pendenza μ della linea equinoziale è calcolabile dalla latitudine φ e dalla declinazione d della parete come :

$$\tan(\mu) = \sin(d) / \tan(\varphi)$$

ed è immediato, misurato l'angolo μ e supposta nota la latitudine φ del posto, calcolare la declinazione della parete¹.

È quindi possibile caso per caso ricavare le formule trigonometriche che permettono di ricavare tutti i parametri incogniti a partire dagli elementi misurati (per l'analisi di alcuni casi specifici si veda FERRARI 1998).

Questo modo di procedere, sicuramente l'unico possibile al tempo in cui era disponibile solamente una calcolatrice o anche solo un regolo calcolatore e non si potevano certo affrontare calcoli troppo complicati, soffre di due inconvenienti.

Il primo è procedurale e deriva dalla necessità di dover adattare il metodo alla situazione specifica da affrontare (tipo di orologio, tipo di elemento geometrico disponibile ecc.) e dover quindi in ogni diversa situazione cercare le formule adatte ad una semplice e veloce soluzione del problema.

Il secondo inconveniente è sostanziale : l'errore che inevitabilmente si introduce nella misura di un elemento geometrico (angolo, posizione,

distanza) ha un effetto diretto sul parametro calcolato e da questo, a cascata, su tutti i successivi parametri incogniti.

In altri termini viene utilizzato un solo elemento geometrico alla volta anziché approfittare di tutte le informazioni estraibili da tutti gli elementi presenti e ridurre così, con un processo di media, l'effetto dell'errore di misura sui risultati.

Ad esempio con il metodo descritto precedentemente la declinazione della parete viene calcolata direttamente dalla pendenza della equinoziale, quando invece la declinazione ha ovviamente un legame con tutti gli elementi misurabili sul quadrante e da tutti questi potrebbe essere in linea di principio ottenuta.

Approccio alternativo

La disponibilità odierna di mezzi di calcolo estremamente potenti ed alla portata di tutti consente di affrontare il problema con una metodologia diversa.

Si prenda in considerazione un orologio direzionale su parete verticale declinante. Tale ipotesi è fatta al solo scopo di semplificare la trattazione seguente, in realtà la metodologia descritta può essere applicata a qualunque tipo di orologio (azimutale, di altezza ecc.) su qualunque superficie, anche non piana.

Le coordinate cartesiane (X_i, Y_i) di un punto i caratteristico del tracciato orario (es. intersezione tra una linea oraria ed una linea diurna) sono calcolabili tramite funzioni note, seppure non lineari, che dipendono dai parametri:

- ω_i = angolo orario corrispondente al punto i
- δ_i = declinazione solare corrispondente al punto i
- φ = latitudine del luogo
- λ = longitudine del luogo
- d = declinazione della parete
- L = lunghezza dell'ortostilo
- x, y = coordinate del punto di ancoraggio dell'ortostilo.

Se si misura su un quadrante sconosciuto la posizione di $N/2$ punti², ognuno dei quali corrispondente ad una declinazione solare δ_i e ad un angolo orario ω_i noti, è possibile scrivere il seguente sistema di N equazioni in 6 incognite :

$$\begin{aligned} X(\omega_i, \delta_i, \varphi, \lambda, d, L, x, y) &= X_i & i=1 \div N/2 \\ Y(\omega_i, \delta_i, \varphi, \lambda, d, L, x, y) &= Y_i & i=1 \div N/2 \end{aligned}$$

dove i coefficienti X_i e Y_i sono le coordinate degli $N/2$ punti misurate rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane arbitrario.

La soluzione di questo sistema di equazioni fornisce i 6 parametri incogniti $\varphi, \lambda, d, L, x$ e y cercati.

Portando a primo membro i termini noti X_i e Y_i e riscrivendo le N equazioni in notazione vettoriale si ha :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{p}) = 0$$

dove :

$\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_N\}$ è il vettore degli errori tra le coordinate calcolate $X()$ ed $Y()$ e le coordinate misurate X_i e Y_i e

$\underline{p} = \{p_1, p_2 \dots p_M\}$ è il vettore delle M incognite (nel nostro caso $M=6$ e $\underline{p} = \{\varphi, \lambda, d, L, x, y\}$)

Benché $N=M$ equazioni possano in linea di principio fornire la soluzione cercata (il vettore \underline{p} che azzerava il vettore $\underline{\varepsilon}$), conviene come già detto utilizzare il maggior numero di informazioni possibili in modo da mediare l'effetto dell'errore sicuramente introdotto nella misura dei punti. È quindi opportuno utilizzare un valore di $N \gg M$ introducendo il maggior numero possibile di elementi misurati X_i e Y_i e risolvere quindi il sistema cercando il vettore \underline{p}^* che minimizza "in un qualche modo" il vettore $\underline{\varepsilon}$ ovvero minimizza gli errori ε_i tra i punti calcolati ed i punti misurati.

Una delle possibili misure della grandezza del vettore $\underline{\varepsilon}$ è la sua norma al quadrato calcolata come :

$$E(\underline{p}) = \|\underline{\varepsilon}(\underline{p})\|^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots \varepsilon_N^2$$

che è anche uguale a N volte il valore quadratico medio degli errori ε_i . La soluzione del sistema è quindi il vettore \underline{p}^* che minimizza la funzione $E(\underline{p})$.

Ricapitolando : si ricercano i parametri che forniscano un tracciato orario il più vicino possibile ai punti misurati, ovvero tali che il valor quadratico medio degli errori ε_i tra le coordinate calcolate e quelle misurate sia il più piccolo possibile.

Algoritmo

Esistono diversi algoritmi per la ricerca di una soluzione ad un problema di questo tipo (si veda ad esempio MADSEN 2004). I risultati presentati nel seguito sono stati ottenuti utilizzando il metodo di Levenberg-Marquardt (MANOLIS 2005) che viene ora sommariamente descritto.

Il metodo è iterativo: al passo i -esimo si calcola la nuova stima della soluzione \underline{p}_{i+1} a partire dalla stima precedente \underline{p}_i come :

$$\underline{p}_{i+1} = \underline{p}_i + \underline{\Delta}_p \quad (1)$$

utilizzando un vettore $\underline{\Delta}_p$ scelto in modo tale da portare alla diminuzione della funzione $E(\underline{p})$.

Il vettore $\underline{\Delta}_p$ viene calcolato risolvendo il sistema lineare

$$(J^T J + \mu I) \underline{\Delta}_p = -J^T \underline{\varepsilon} \quad (2)$$

dove J è la matrice Jacobiana

$$(J(\underline{p}))_{ij} = \partial \varepsilon_i / \partial p_j$$

I è la matrice identità e $\mu \geq 0$ è un fattore di smorzamento.

L'algoritmo è auto adattativo ed il valore di μ viene ricalcolato ad ogni passo in base al risultato raggiunto :

- quando si è ancora lontani dalla soluzione viene usato un valore elevato di μ ; l'espressione (2) può in tal caso essere approssimata come

$$\underline{\Delta}_p = - (1/\mu) J^T \underline{\varepsilon}$$

che corrisponde ad un piccolo passo nella direzione della massima pendenza della funzione (*steepest descent method*). Questa assunzione garantisce la convergenza, seppure molto lenta, ad un minimo locale di $E(\underline{p})$.

- quando si è ormai vicini alla soluzione viene usato un valore piccolo di μ ; l'espressione (2) può allora essere approssimata come

$$(J^T J) \underline{\Delta}_p = -J^T \underline{\varepsilon}$$

che corrisponde alla soluzione secondo il metodo di Gauss-Newton, più veloce ma meno robusto del precedente.

Il processo iterativo (1) termina quando :

- l'errore residuo $E(\underline{p}^*)$ è inferiore ad una soglia prefissata
- la norma del vettore $\underline{\Delta}_p$ è inferiore ad una soglia prefissata
- è stato eseguito il numero massimo consentito di iterazioni

Negli esempi riportati successivamente il sistema lineare (2) è stato risolto tramite scomposizione SVD (*Singular Value Decomposition*) e la matrice Jacobiana è stata approssimata nelle varie fasi di iterazione tramite calcolo del rapporto incrementale.

Occorre ancora notare che l'algoritmo illustrato converge generalmente verso il minimo locale più vicino alla ipotesi iniziale \underline{p}_0 , il quale non è necessariamente il minimo assoluto ricercato della funzione $E(\underline{p})$.

Questo significa che soltanto partendo da valori "ragionevoli" dei parametri costruttivi dell'orologio si può avere una buona confidenza di giungere al risultato corretto.

Per evitare questa dipendenza dalla stima iniziale, i risultati che seguono sono stati ottenuti mediante *run* successivi dell'algoritmo, ognuno di questi inizializzato con valori di φ , λ , e d calcolati come :

$$\begin{aligned} \varphi &= -90 + j * 15 & j &= 0 \div 12 \\ \lambda &= -180 + k * 60 & k &= 0 \div 6 \\ d &= -180 + l * 15 & l &= 0 \div 24 \end{aligned}$$

in modo tale da scansionare tutto il dominio di definizione delle tre incognite³. Quindi, tra tutte le $13*7*25=2275$ soluzioni così ottenute, è stata scelta quella che fornisce il valore più piccolo dell'errore quadratico medio ($E(\underline{p})/N$) risultante.

Simulazioni⁴

Allo scopo di verificare il metodo descritto si prenda in considerazione un quadrante verticale ad ore italiane ($\varphi = 40$ gradi N, $d = 30$ gradi W, $L = 25$) di cui siano noti rispettivamente :

- caso 1: le tre linee orarie 17, 19 e 21 (ognuna definita da due punti)
- caso 2: le intersezioni tra l'equinoziale e le stesse tre linee orarie
- caso 3: intersezioni tra la linea 17 e l'equinoziale e tra la linea 19 e le solstiziali
- caso 4: tutti gli elementi precedenti

I valori recuperati sono i seguenti :

	v. vero	caso 1	caso 2	caso 3	caso 4
φ	40.00	40.03	40.01	40.02	40.00
d	30.00	29.92	30.05	30.00	30.01
L	25.00	25.19	24.98	25.01	25.00
x	125.00	125.36	125.06	125.02	125.01
y	37.00	37.11	37.01	37.00	36.99

Le figure 1, 2 e 3 mostrano graficamente i risultati ottenuti nei primi tre casi (le croci evidenziano i punti inseriti come dati di input del problema).

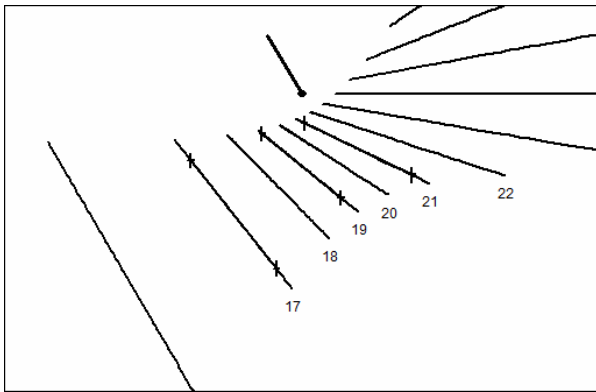


Figura 1

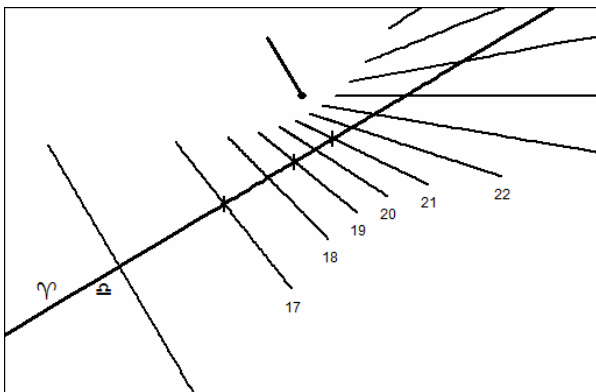


Figura 2

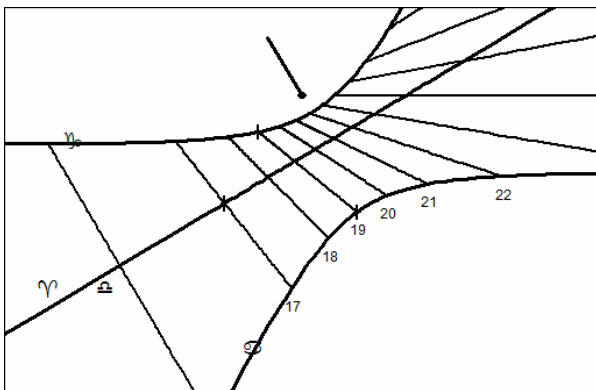


Figura 3

Allo scopo di verificare la robustezza del metodo in presenza di errori di misura, ai valori

misurati è stato aggiunto un errore casuale compreso tra -1 e $+1$ (pari a $1/25$ dell'ortostilo). I parametri ottenuti sono indicati nella tabella seguente :

	v. vero	caso 1	caso 2	caso 3	caso 4
φ	40.00	38.57	35.93	34.83	39.96
d	30.00	33.31	25.22	25.70	29.60
L	25.00	17.46	24.36	22.58	25.10
x	125.00	107.93	121.69	119.63	124.89
y	37.00	31.61	34.81	35.59	37.00

Mentre nei primi tre casi l'effetto dell'errore di misura non è trascurabile, nel quarto caso il processo di media implicito nel metodo porta ad una sostanziale riduzione dell'errore risultante (si veda la figura 4) e ad un buon allineamento dei risultati ai valori teorici.

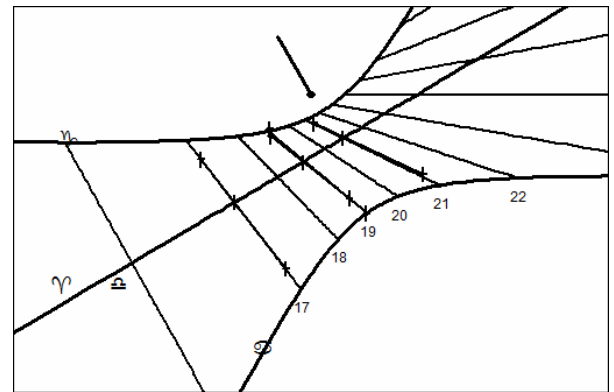


Figura 4

In modo simile al precedente si consideri ora un quadrante orizzontale ad ore temporali ($\varphi = 40$ gradi N, $L = 25$) di cui si suppongono noti rispettivamente :

- caso 1: le quattro linee orarie⁵ 2, 4, 8 e 10 (ognuna definita da due punti)
- caso 2: l'intersezione tra l'equinoziale e le linee orarie 2 e 10 e tra la solstiziale invernale e le linee 3 e 9
- caso 3: tutti gli elementi precedenti

I valori recuperati sono i seguenti :

	v. vero	caso 1	caso 2	caso 3
φ	40.00	38.62	39.99	39.60
L	25.00	25.45	25.01	25.16
x	0.00	0.00	0.00	0.00
y	0.00	-0.41	-0.02	-0.42

Aggiungendo nuovamente ai dati misurati un errore casuale compreso tra -1 e +1, si ottengono i parametri seguenti :

	v. vero	caso 1	caso 2	caso 3
φ	40.00	36.64	39.79	39.15
L	25.00	25.47	25.26	25.67
x	0.00	0.11	-0.18	0.16
y	0.00	6.48	-0.42	-0.29

La figura 5 mostra la soluzione trovata nel caso 3.

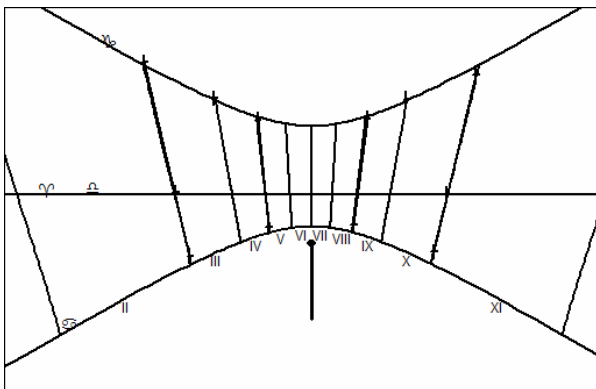


Figura 5

Si prenda infine in considerazione un quadrante verticale ad ore francesi comprensive dell'errore di longitudine ($\varphi = 45$ gradi N, $\lambda = 8$ gradi E, $d = 60$ gradi E, $L = 25$) di cui siano noti rispettivamente :

- caso 1: la linea oraria 10 (definita da due punti) e le intersezioni delle linee 8 e 12:30 con l'equinoziale
- caso 2: l'intersezione tra la solstiziale invernale e le linee 8:30 e 10:30 e l'intersezione tra la solstiziale estiva e la linea delle 11:30
- caso 3: tutti gli elementi precedenti

I valori recuperati sono i seguenti :

	v. vero	caso 1	caso 2	caso 3
φ	45.00	45.04	45.05	45.02
λ	-8.00	-7.99	-7.93	-7.98
d	-60.00	-60.05	-59.53	-60.03
L	25.00	25.00	25.19	25.01
x	0.00	-0.01	0.21	-0.01
y	0.00	0.03	0.02	0.01

I risultati ottenuti aggiungendo l'errore di misura sono :

	v. vero	caso 1	caso 2	caso 3
φ	45.00	44.63	32.99	45.19
λ	-8.00	-10.10	-18.59	-8.73
d	-60.00	-57.71	-107.7	-59.36
L	25.00	24.18	0.58	24.72
x	0.00	-0.18	2.33	-0.24
y	0.00	0.36	1.01	0.30

La figura 6 mostra la soluzione trovata nel caso 3 relativo all'utilizzo contemporaneo di tutti i valori disponibili.

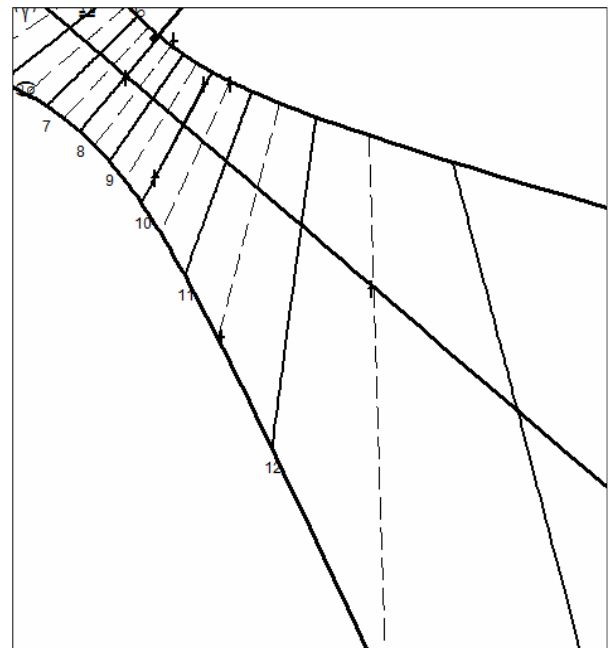


Figura 6

Possono esistere situazioni in cui i dati misurati non definiscono univocamente i parametri del quadrante, ovvero il sistema di equazioni ammette infinite soluzioni.

Ad esempio nel caso del quadrante verticale ad ore babilonesi di figura 7 ($\varphi = 40$ gradi N, $d = 30$ gradi W, $L = 25$) la sola conoscenza degli incroci delle linee orarie 5, 6 e 7 con la linea meridiana fornisce infinite soluzioni di cui quella in figura 8 ($\varphi = 40.02$ gradi N, $d = 80.89$ gradi E, $L = 4.58$) è un esempio : tutte assolutamente corrette da un punto di vista matematico ma ben diverse da quella cercata.

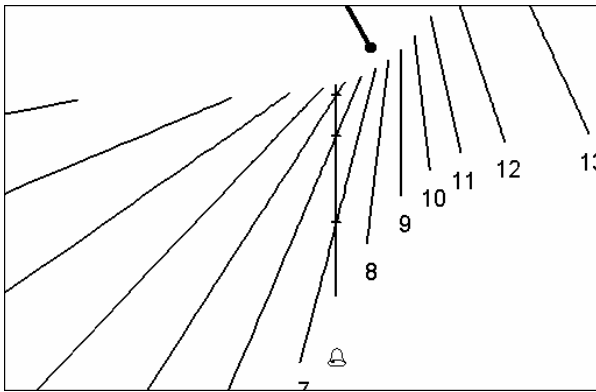


Figura 7

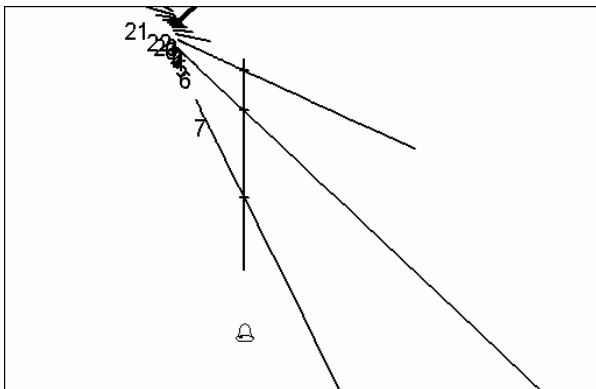


Figura 8

La soluzione corretta (o meglio la soluzione desiderata tra le tante possibili) può essere trovata solamente con l'introduzione di ulteriori elementi misurati (punti o linee) o con la riduzione del numero di incognite : nell'esempio in esame la conoscenza della posizione o della lunghezza dell'ortostilo porta alla soluzione desiderata.

Oppure ancora può essere sufficiente introdurre una ipotesi iniziale \underline{p}_0 del vettore delle incognite abbastanza vicina ai valori corretti ed effettuare quindi una ricerca locale nell'intorno di \underline{p}_0 .

Conclusioni

Il metodo esposto può essere utile per il calcolo dei parametri di progetto di orologi solari di cui restino pochi elementi.

Le simulazioni effettuate consigliano di seguire i seguenti accorgimenti :

- utilizzare il maggior numero di informazioni possibili (punti, linee)
- utilizzare preferibilmente punti caratteristici del tracciato orario (intersezioni tra linee orarie e linee diurne, meridiana ecc.) anziché linee

- utilizzare i valori eventualmente noti dei parametri (es. latitudine, posizione dello stilo ecc.) come costanti e non come incognite
- provare a cercare una soluzione locale a partire da un set di valori iniziali "ragionevoli" ovvero presumibilmente vicini a quelli cercati
- giudicare sempre con "buon senso" il risultato, aiutandosi anche con il grafico del quadrante sovrapposto ai dati di input, in modo da filtrare soluzioni che possono essere matematicamente corrette ma risultano "gnomonicamente" assurde.

Note

¹ Naturalmente la declinazione della parete potrebbe essere misurata con i consueti numerosi metodi descritti in bibliografia, ma in realtà quello che qui si va cercando è il valore di declinazione utilizzato dal costruttore del quadrante che potrebbe non coincidere (ad es. perché spostato dal luogo originale o anche per errore dello stesso costruttore) con quello effettivo della parete.

² In realtà capita comunemente, quando non siano tracciate né le linee diurne né la linea meridiana, di avere a disposizione solo alcune linee rette senza alcun punto di intersezione. In tal caso il metodo descritto può ancora essere utilizzato imponendo che alcuni punti caratteristici del tracciato orario, seppur non presenti nel manufatto, giacciono sulla retta misurata, oppure ancora imponendo che la pendenza calcolata e la pendenza misurata siano uguali.

³ Il passo utilizzato nella scansione del volume delimitato dai valori estremi di φ , λ , e d è stato determinato sperimentalmente.

⁴ Tutti i risultati esposti in queste pagine sono stati ottenuti con il programma "Orologi Solari" in revisione 17.4 disponibile sul sito dell'autore

<http://digilander.libero.it/orologi.solari>. Per una copia dei dati di input utilizzati negli esempi contattare l'autore alla casella di posta giancasalegno@yahoo.it.

⁵ Benché le linee temporali siano in realtà delle linee curve, esse vengono qui approssimate con

linee rette : i risultati sono quindi tanto più corretti quanto più è piccola la latitudine del luogo.

Bibliografia

FERRARI G. (1998), *Relazioni e Formule per lo studio delle Meridiane Piane*, pubblicato in proprio, Parte Quinta, pp. 146-157

MADSEN K. et al. (2004), *Methods for non-linear least squares problems*, Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, 2nd Edition, http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/edoc_download.php/3215/pdf/imm3215.pdf

MANOLIS I. et al. (2005), *A Brief Description of the Levenberg-Marquardt Algorithm Implemented by levmar*, Institute of Computer Science, Heraklion, Crete, GREECE, <http://www.ics.forth.gr/~lourakis/levmar/levmar.pdf>