

Linee degli Ascendenti: una soluzione analitica

di Gianpiero Casalegno

L'articolo propone una soluzione analitica alla ricerca delle linee degli Ascendenti.

This article suggests an analytical solution to the design of the lines of the Ascending Signs.

Introduzione

Recentemente su Gnomonica Italiana sono apparsi alcuni articoli che trattano delle linee degli ascendenti tracciate su orologi solari. Tra questi in particolare l'ultimo (GUNELLA 2010) descrive come sia possibile ricavare queste linee utilizzando un metodo grafico.

Il presente articolo riprende l'argomento affrontando il problema con un metodo analitico.

Allo scopo di rendere più evidenti ed intuitivi i passaggi matematici, questi sono accompagnati da grafici che utilizzano la proiezione stereografica dell'astrolabio.

Definizioni e formule

L'eclittica, ovvero la linea immaginaria tracciata dal sole nel cielo durante l'anno, è storicamente suddivisa in modo arbitrario in 12 settori larghi ognuno 30 gradi che vengono chiamati con i nomi dei 12 segni dello zodiaco.

L'ascendente di un segno rappresenta l'istante in cui quel segno sorge sull'orizzonte e la linea degli ascendenti tracciata su un quadrante rappresenta la posizione assunta dal sole, in un qualunque momento dell'anno, in corrispondenza di quella situazione.

Per poter calcolare questa linea dovremo utilizzare tre sistemi di riferimento:

- le coordinate eclittiche, longitudine λ e latitudine β
- le coordinate equatoriali, ascensione retta α e declinazione δ
- le coordinate altazimutali, azimut A ed altezza b

La conversione tra i primi due sistemi di coordinate si realizza mediante le formule seguenti (MEEUS 1998):

$$\tan \alpha = (\sin \lambda \cos \varepsilon - \tan \beta \sin \varepsilon) / \cos \lambda \quad (1)$$

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda \quad (2)$$

dove ε è l'obliquità dell'eclittica (negli esempi seguenti approssimata a $23,5^\circ$).

Poiché siamo interessati a punti della sfera celeste che si trovano sull'eclittica ed hanno latitudine β nulla, le formule (1) e (2) si semplificano come:

$$\tan \alpha = \tan \lambda \cos \varepsilon \quad (3)$$

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin \lambda \quad (4)$$

Introduciamo ancora l'angolo orario H :

$$H = t * 15 = \theta - \alpha \quad (5)$$

dove t è il tempo locale¹ e θ è il tempo siderale.

Ogni punto della linea cercata è perfettamente individuato dalla conoscenza dell'azimut A e dell'altezza b . Questi due parametri sono legati a H e δ dalle formule:

$$\tan A = \sin H / (\cos H \sin \phi - \tan \delta \cos \phi) \quad (6)$$

$$\sin b = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H \quad (7)$$

avendo indicato con ϕ la latitudine del luogo.

La conoscenza di H e δ è quindi tutto ciò che ci serve avere per poter disegnare sul quadrante un punto di una linea degli ascendenti².

¹ H è misurato rispetto al meridiano locale e di conseguenza t è definito rispetto al mezzogiorno locale. Negli esempi successivi i valori temporali sono invece indicati con riferimento alla mezzanotte, in accordo all'attuale sistema di misurazione del tempo.

² Si noti che, essendo l'eclittica un circolo massimo della sfera celeste, ogni linea degli ascendenti è una retta e due punti sono quindi sufficienti per disegnarla.

Calcolo di un punto della linea

Come primo passo nel calcolo dobbiamo valutare l'angolo orario H_0 (ovvero l'istante $t_0 = H_0/15$) in cui il segno con longitudine λ_0 e declinazione δ_0 (ricavabile dalla (4)) si trova sull'orizzonte del mattino:

$$H_0 = -\cos^{-1}(-\tan \phi \tan \delta_0) \quad (8)$$

ricavata dalla (7) imponendo $b=0$.

Calcoliamo inoltre tramite la (3) l'ascensione retta α_0 corrispondente allo stesso segno λ_0 .

In figura 1 sono indicati H_0 e α_0 per il segno ascendente del Toro ($\lambda_0 = 30^\circ$, $t_0 = 5,296$, $\alpha_0 = 27,90^\circ$) ad una latitudine di 42° N.

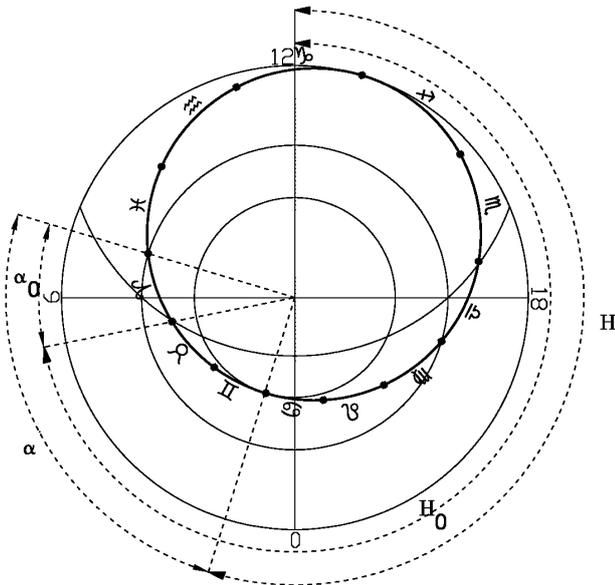


Fig. 1

Un qualunque punto dell'eclittica avente longitudine λ ed ascensione retta α (calcolabile da λ con la (3)) dista dal segno λ_0 una distanza angolare pari a $\alpha - \alpha_0$ (come mostrato in fig. 1 per l'inizio del segno del Cancro rispetto all'ascendente del segno del Toro).

L'angolo orario H (da cui il relativo valore temporale $t = H/15$) del segno λ sarà quindi:

$$H = H_0 + \alpha_0 - \alpha \quad (9)$$

La tabella 1 mostra i risultati ottenuti per la linea di ascendente Toro prendendo in

considerazione i punti iniziali di tutti i segni zodiacali³.

segno zodiacale	λ [gradi]	δ [gradi]	α [gradi]	t	
				[ore]	[h:m:s]
Ariete	0	0,00	0,00	7,156	7:09:22
Toro	30	11,50	27,90	5,296	5:17:46
Gemelli	60	20,20	57,81	3,302	3:18:08
Cancro	90	23,50	90,00	1,156	1:09:22
Leone	120	20,20	122,19	23,010	23:00:36
Vergine	150	11,50	152,10	21,016	21:00:58
Bilancia	180	0,00	180,00	19,156	19:09:22
Scorpione	210	-11,50	207,90	17,296	17:17:46
Sagittario	240	-20,20	237,81	15,302	15:18:08
Capricorno	270	-23,50	270,00	13,156	13:09:22
Acquario	300	-20,20	302,19	11,010	11:00:36
Pesci	330	-11,50	332,10	9,016	9:00:58

Tab. 1

Nei passaggi precedenti si è calcolata la posizione di un punto dell'eclittica definito in base al suo valore di longitudine λ , cioè un punto della linea di ascendente avente un preciso valore di declinazione δ (e quindi punto di intersezione tra la linea di ascendente ed una linea diurna).

Un'altra ricerca utile può essere quella dell'incrocio tra la linea di ascendente ed una linea oraria.

A tale scopo si può procedere nel modo seguente. Si consideri l'ora locale t corrispondente all'angolo orario $H = t * 15$.

L'ascensione retta α corrispondente è (in fig. 2 l'esempio con $t = 6$)⁴:

$$\alpha = H_0 + \alpha_0 - H \quad (10)$$

Dalla (3) si ha:

$$\lambda = \tan^{-1}(\tan \alpha / \cos \varepsilon) \quad (11)$$

e dalla (4):

$$\delta = \sin^{-1}(\sin \varepsilon \sin \lambda) \quad (12)$$

³ Si noti che non tutti i punti trovati sono utilizzabili per tracciare le linee sul quadrante in quanto alcuni (quelli su sfondo grigio) corrispondono a sole tramontate.

⁴ La (9) e la (10) possono anche essere lette come:

$$H + \alpha = H_0 + \alpha_0 = \theta = \theta_0$$

ovvero il tempo siderale resta costante per tutti i punti appartenenti ad una stessa linea degli ascendenti.

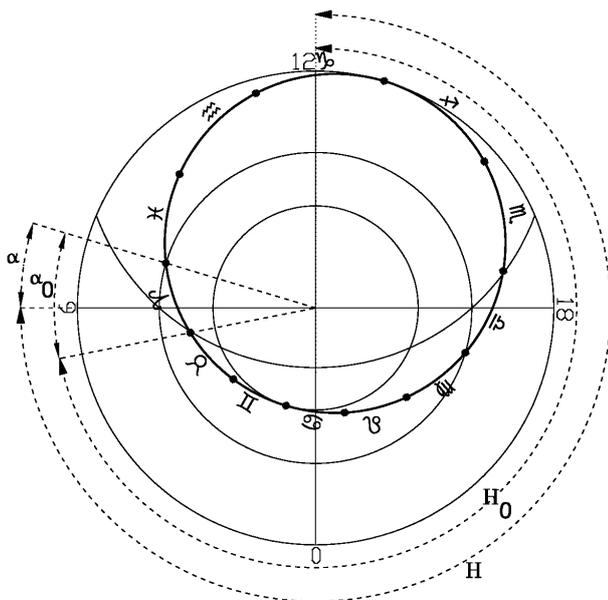


Fig. 2

Ritornando all'esempio precedente, l'intersezione della linea dell'ascendente del Toro con le linee orarie delle 6 e delle 12 avviene rispettivamente con declinazioni pari a $7,385^\circ$ e $-22,541^\circ$.

Conclusioni

Il calcolo analitico delle linee degli ascendenti non ha a mio parere il fascino arcano e l'immediatezza esplicativa di un metodo grafico.

D'altra parte permette, con un computer a disposizione, il calcolo veloce e preciso di tutti i punti desiderati.

Ad esempio la figura 3 riporta il grafico, ottenuto con il programma *Orologi Solari*, di un quadrante verticale declinante 45° est dove sono evidenziati alcuni dei punti calcolati precedentemente.

Bibliografia

GUNELLA A. (2010), "Una parola 'definitiva' nello studio grafico del diagramma degli ascendenti?", *Gnomonica Italiana* n. 21, luglio 2010

MEEUS J. (1998), "Astronomical Algorithms", Willmann-Bell Inc, Second Edition 1998

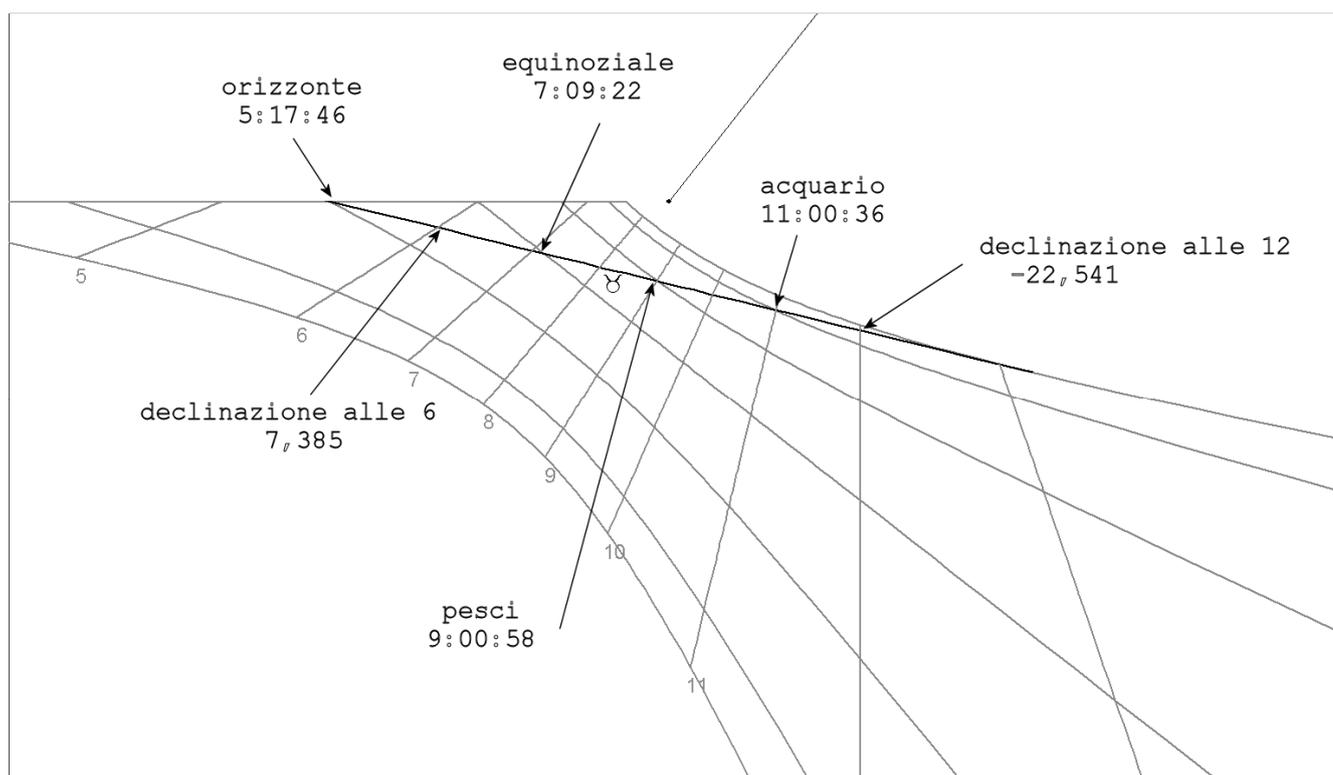


Fig. 3