

Orologi equatoriali a riflessione

Viene descritto un sistema di orologi a riflessione con il tracciato tipico degli orologi equatoriali, realizzato su una parete quasi a Nord a S. Maria Maggiore (VB). Si forniscono i criteri per il progetto di questo genere di orologi, utilizzando diversi metodi di calcolo.

di Gian Casalegno (gian.casalegno@gmail.com)

La Val Vigizzo, dove si svolgerà il XX Seminario Nazionale di Gnomonica, vanta un nutrito numero di orologi solari. Tra i tanti che vi si possono ammirare, spicca un gruppo di quattro quadranti che sono non solo tecnicamente ed artisticamente ben realizzati, ma utilizzano una soluzione tecnica originale ed affascinante¹.

Essendo una realizzazione alquanto inconsueta potrebbe non essere facilmente comprensibile a prima vista. Questa è la ragione di questo breve articolo.

Gli orologi in questione si trovano a S. Maria Maggiore (VB) e sono catalogati su Sundial Atlas con i riferimenti [IT005738](#), [IT011411](#), [IT011412](#) e [IT011413](#).

I quattro orologi sono disposti simmetricamente sulla facciata esposta a nord della casa, due sullo spigolo sinistro e due sullo spigolo destro (fig. 1). Gli specchietti, appena visibili in figura, si trovano su supporti montati sui centri dei quattro settori circolari.

Per comprenderne il funzionamento occorre tenere presente che in un orologio a riflessione lo specchio riflette una metà della sfera celeste sulla parete rimappando le linee orarie e le linee diurne.

Giocando con l'orientamento dello specchio (declinazione ed inclinazione) è quindi possibile ottenere un tracciato diverso da quello che ci si aspetterebbe su una parete con quella specifica declinazione².

Nel caso in questione si noterà che i quattro quadranti assomigliano moltissimo ad orologi equatoriali ovvero realizzati su un piano parallelo al piano equatoriale.

Una analisi attenta e ravvicinata consente di verificare che i 2 quadranti superiori sono effettivamente la parte sinistra e la parte destra di un orologio nord-equatoriale ed i 2 inferiori lo sono altrettanto per un orologio sud-equatoriale.



Fig. 1 – I quadranti a riflessione di Casa Garavaglia a S. Maria Maggiore (VB) - foto di Giuseppe De Donà

¹ I quattro quadranti, opera di Roberto Garavaglia, sono stati ritenuti degni di menzione alla dodicesima edizione del concorso "Le Ombre del Tempo"

² Questo concetto è stato espresso ed esemplificato da Tonino Tasselli nella sua presentazione al Seminario di Chianciano [rif. 2].

Per ottenere questi tracciati è sufficiente disporre lo specchio in modo tale da riflettere rispettivamente la semisfera celeste superiore o quella inferiore perpendicolarmente alla superficie del quadrante (così come avviene in un normale orologio equatoriale).

Supponendo per semplicità che la parete sia rivolta esattamente a nord (declinazione 180 gradi) questo requisito si realizza (osservando le figure 2 e 3 che visualizzano il piano meridiano con l'asse terrestre NS, lo zenit Z, il polo della parete W ed il polo M dello specchio) proiettando i poli N ed S su W' tramite uno specchio M avente inclinazione I_m rispetto all'orizzonte pari a:

$$\begin{aligned} I_m &= \varphi / 2 && \text{per il quadrante nord-equatoriale} \\ I_m &= 90^\circ + \varphi / 2 && \text{per il quadrante sud-equatoriale} \end{aligned}$$

dove si è indicata con φ la latitudine del luogo.

Per la località in questione dove la latitudine vale 46.1337° i due specchi devono quindi essere inclinati rispettivamente 23.067° (la coppia superiore per l'estate) e 113.067° (la coppia inferiore per l'inverno). Ovviamente come tutti gli orologi equatoriali anche questi orologi non funzioneranno intorno agli equinozi quando il raggio di luce riflesso sarà quasi parallelo alla parete ed il punto luce fuggerà all'infinito.

In realtà la parete della casa non è rivolta esattamente a nord ma presenta una declinazione di 178.8° Est (valore dedotto dalle note alla scheda [IT005738](#)): i ragionamenti devono quindi essere necessariamente svolti sulla sfera celeste e non semplicemente sul piano meridiano come in fig. 2 e 3.

In fig. 4 è rappresentata la sfera celeste con il polo nord N, lo zenit Z della località di latitudine φ , il polo della parete W (verticale e con declinazione D_w) e la direzione opposta W' sulla quale lo specchio M dovrà riflettere il polo N affinché venga proiettato perpendicolarmente alla parete.

Lo specchio M è posizionato con declinazione D_m ed inclinazione I_m .

Lavorando sui triangoli sferici NZW' e MZW' si ottengono le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \cos(NW') &= \cos(\varphi) * \cos(D_w) \\ NM &= MW' = NW' / 2 \\ \sin(W') &= \cos(\varphi) * \sin(D_w) / \sin(NW') \\ \tan(MZW') &= \sin(W') * \tan(MW') \\ \sin(MZ) &= \sin(W') * \sin(MW') / \sin(MZW') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_m &= - (MZW' + 180^\circ - D_w) \\ I_m &= MZ \end{aligned}$$

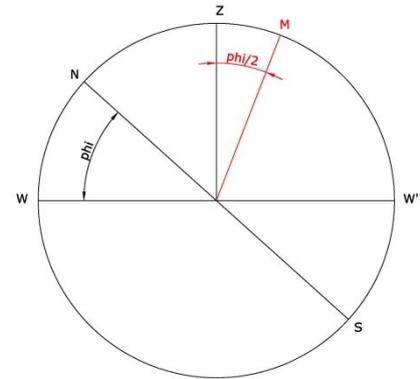


Fig. 2 – Proiezione del polo nord sul piano della parete (estate)

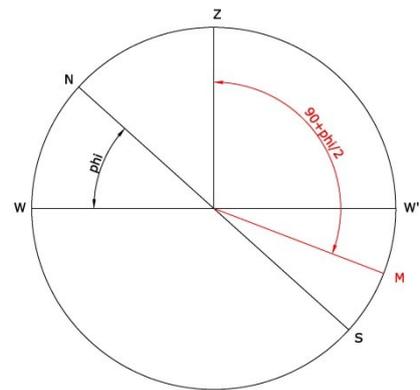


Fig. 3 – Proiezione del polo sud sul piano della parete (inverno)

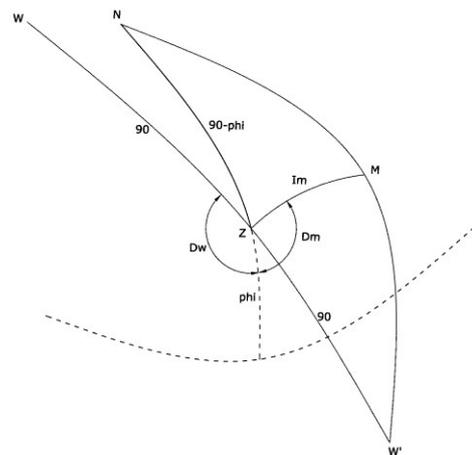


Fig. 4 – Proiezione del polo nord sul piano della parete declinante (estate)

Per latitudine 46.1337° N e declinazione della parete 178.8° E si ottiene:

$$Dm = 3.905^\circ \text{ W}$$

$$Im = 23.1^\circ$$

Analogamente per i quadranti invernali dalla fig. 5, lavorando sui triangoli sferici SZW' e MZW', si ottengono le relazioni seguenti:

$$\cos(SW') = -\cos(\varphi) * \cos(Dw)$$

$$SM = MW' = SW' / 2$$

$$\sin(W') = \cos(\varphi) * \sin(Dw) / \sin(SW')$$

$$\tan(MZW') = \sin(W') * \tan(MW')$$

$$\sin(MZ) = \sin(W') * \sin(MW') / \sin(MZW')$$

$$Dm = - (180^\circ - Dw - MZW')$$

$$Im = MZ$$

Per latitudine 46.1337° N e declinazione della parete 178.8° E si ottiene:

$$Dm = 0.709^\circ \text{ W}$$

$$Im = 113.068^\circ$$

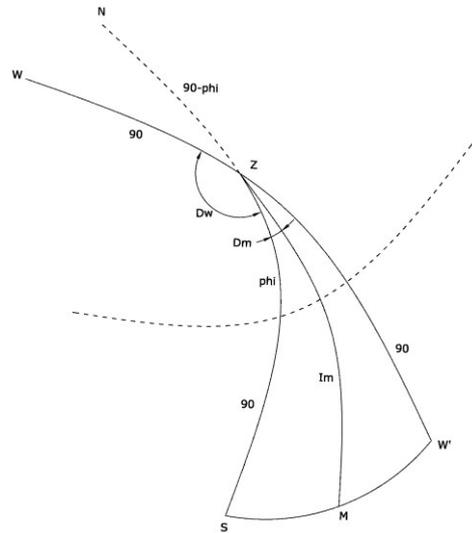


Fig. 5 – Proiezione del polo sud sul piano della parete declinante (inverno)

Con la modesta declinazione di questa parete i valori ottenuti non si discostano molto da quelli precedenti relativi ad una parete esposta esattamente a nord.

Nel caso di pareti più declinanti lo specchio assume una declinazione più marcata e causa di conseguenza una rotazione del sistema orario e della linea dell'orizzonte: si vedano ad es. le fig. 6 e 7 che mostrano i quadranti ottenuti per una parete declinante 150 gradi Est³.

L'orientamento dello specchio risulta essere in questo caso:

$$Dm = 70.91^\circ \text{ W} \quad Im = 36.27^\circ$$

$$Dm = 17.78^\circ \text{ W} \quad Im = 113.77^\circ$$

per il quadrante estivo
per il quadrante invernale

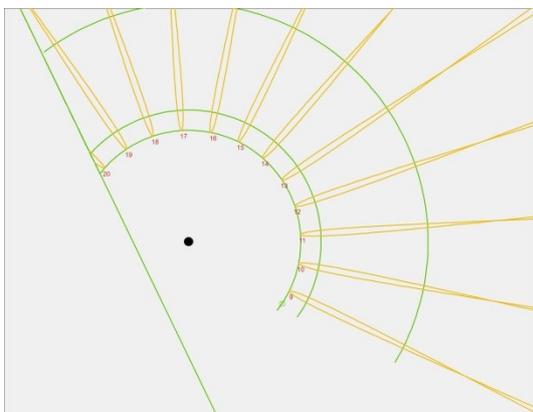


Fig. 6 – Parete 150° E: quadrante estivo

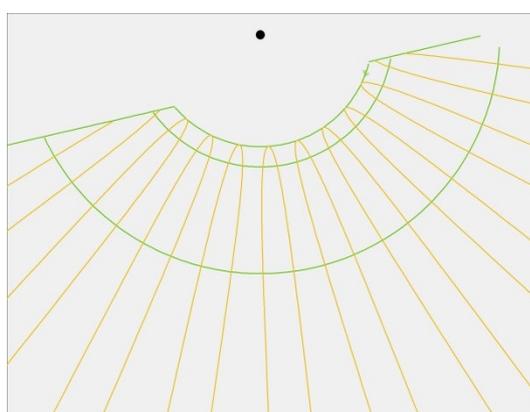


Fig. 7 – Parete 150° E: quadrante invernale

³ I quadranti di fig. 6 e 7 sono stati ottenuti con il programma Orologi Solari scaricabile da:
www.sundials.eu/download/download.html

I medesimi risultati possono essere ottenuti utilizzando l'algebra vettoriale invece della geometria sferica. Al seminario di Lignano [rif. 1] e quindi a quello di Chianciano [rif. 2], Tonino Tasselli illustrò come il calcolo vettoriale possa essere proficuamente utilizzato nel calcolo sia di orologi classici sia di orologi a riflessione. Come descritto in [2] la riflessione operata dallo specchio sul raggio incidente \vec{a} può essere descritta dalla matrice di Householder H.

$$\vec{b} = H \cdot \vec{a}$$

$$H = \begin{pmatrix} (1-2n_x^2) & -2n_x n_y & -2n_x n_z \\ -2n_x n_y & (1-2n_y^2) & -2n_y n_z \\ -2n_x n_z & -2n_y n_z & (1-2n_z^2) \end{pmatrix}$$

Il quadrante equatoriale settentrionale si ottiene imponendo che un raggio \vec{a} proveniente dal polo nord sia riflesso nel raggio \vec{b} perpendicolare alla parete.

In un sistema di riferimento ortogonale dove il piano xy è il piano orizzontale locale, \hat{x} è diretto verso sud, \hat{y} è diretto verso est e \hat{z} è diretto verso lo zenit, i vettori \vec{a} e \vec{b} così definiti sono:

$$\vec{a} = \cos(\varphi)\hat{x} - \sin(\varphi)\hat{z}$$

$$\vec{b} = -\cos(D_w)\hat{x} + \sin(D_w)\hat{y}$$

dove φ è la latitudine del luogo e D_w è la declinazione della parete.

Risolvendo per n_x , n_y e n_z si ottiene:⁴

$$n_z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2(\varphi)}{2 + 2\cos(\varphi)\cos(D_w)}}$$

$$n_x = -\frac{\cos(\varphi) + \cos(D_w)}{\sin(\varphi)} n_z$$

$$n_y = \frac{-\sin(D_w)}{2\cos(\varphi)n_x - 2\sin(\varphi)n_z}$$

E per la parete di S. Maria Maggiore si ha

$$n_z = 0.9198 \quad n_x = 0.3914 \quad n_y = -0.0267$$

da cui

$$D_m = -\tan^{-1}\left(\frac{n_y}{n_x}\right) = 3.905 \quad I_m = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}{n_z}\right) = 23.1$$

⁴ Le due soluzioni che nascono dal segno \pm forniscono le normali alle due facce dello specchio. Delle due occorre scegliere di volta in volta quella corretta, ad esempio quella che soddisfa la condizione: $\vec{b} \cdot \hat{n} > 0$

Analogamente proiettando il polo sud sulla parete si ottiene:

$$\vec{a} = -\cos(\varphi)\hat{x} + \sin(\varphi)\hat{z}$$

$$\vec{b} = -\cos(D_w)\hat{x} + \sin(D_w)\hat{y}$$

$$n_z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2(\varphi)}{2 - 2\cos(\varphi)\cos(D_w)}}$$

$$n_x = \frac{\cos(D_w) - \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} n_z$$

$$n_y = \frac{-\sin(D_w)}{-2\cos(\varphi)n_x + 2\sin(\varphi)n_z}$$

E per la parete di S. Maria Maggiore si ha ancora:

$$n_z = -0.3918 \quad n_x = 0.92 \quad n_y = -0.0114$$

$$D_m = -\tan^{-1}\left(\frac{n_y}{n_x}\right) = 0.709 \quad I_m = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}{n_z}\right) = 113.068$$

Un terzo modo di procedere (suggeritomi da Francesco Caviglia) può essere quello indicato in [3]; procedendo secondo questa via, si deve:

- determinare anzitutto sul globo terrestre la località equivalente a quella di lavoro;
- poi trovare le coordinate geografiche del polo dello specchio necessarie per portare la località equivalente al Polo Nord e le coordinate del polo dello specchio per portarla al Polo Sud;
- infine tradurre con le formule classiche le coordinate terrestri (equatoriali) trovate per i poli dei due specchi nelle coordinate dell'orizzonte locale.

Riferimenti

[1] T. Tasselli, "[*Applicazioni del calcolo vettoriale alla gnomonica*](#)" – memoria presentata al XIII Seminario Nazionale di Gnomonica, Lignano (Ud), 8-9-10/4/2005, pubblicata in Atti, pagg. 162-177

[2] T. Tasselli, "[*Applicazioni del calcolo vettoriale alla gnomonica – riflessione e rifrazione*](#)" – memoria presentata al XIV Seminario Nazionale di Gnomonica, Chianciano (Si), 6-7-8/10/2006, pubblicata in Atti, pagg. 173-181

[3] F. Ferro Milone, "[*Globo parallelo, proiezione gnomonica diretta e riflessa*](#)", Orologi Solari N. 3-6, dic. 2013 - dic. 2014

Nel sito di Orologi Solari www.orelogisolari.eu nella sezione "bonus" del numero corrente è possibile scaricare alcune animazioni create con il software "Orologi solari" di Gian Casalegno.